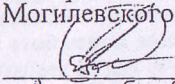


УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома


« 9 » ноября 2022 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 26 ноября 2022 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

Х класс

- Доказать неравенство $(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \dots (1 + \operatorname{tg} 89^\circ) > 2^{89}$.
- Через точку A , лежащую на оси абсцисс левее начала координат, проведена прямая под углом 45° к оси абсцисс. Эта прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках B и C , а ось ординат – в точке D . Точка O – начало координат. Окружность, описанная около треугольника BOC , пересекает ось ординат в точке E . Найти длину отрезка ED .
- Найти наибольший корень уравнения $100x + 50 \cdot \{x\} = 203,3$.
Примечание.
 $[x]$ – это наибольшее целое число, не превосходящее x .
 $\{x\}$ называется *целой частью числа* x .
Например, $[5,2] = 5$, $[7] = 7$, $[-3,1] = -4$.
 $\{x\} = x - [x]$, $\{x\}$ – называется *дробной частью числа* x .
Например, $\{5,2\} = 0,2$, $\{7\} = 0$, $\{-3,1\} = 0,9$.
- Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) пересекаются в точке O . Окружность w_1 , проходящая через точки O и A , касается стороны AD в точке A . Окружность w_2 , проходящая через точки O и D , касается стороны AD в точке D . Продолжения сторон AB и DC пересекаются в точке M . Окружность w_1 пересекает отрезок AM в точке P . Окружность w_2 пересекает отрезок DM в точке Q . Доказать, что треугольники AMD и QMP подобны.
- Вокруг Белоснежки стоят 7 гномов. У Белоснежки имеются колпаки трех цветов: белого, синего и красного (имеется достаточное количество колпаков каждого цвета). На голову каждого гнома Белоснежка надевает один из колпаков. Сколькими способами Белоснежка может надеть колпаки на головы всем семи гномам так, чтобы на головах любых двух гномов, стоящих рядом, были колпаки разного цвета? (Гномы стоят по кругу, у каждого гнома есть два соседа).

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. *Решение:*

Заметим, что $1 + \operatorname{tg} 45^\circ = 2$, а для остальных множителей согласно неравенству Коши, имеем: $1 + \operatorname{tg} 1^\circ > 2\sqrt{\operatorname{tg} 1^\circ}$, $1 + \operatorname{tg} 2^\circ > 2\sqrt{\operatorname{tg} 2^\circ}$, ..., $1 + \operatorname{tg} 89^\circ > 2\sqrt{\operatorname{tg} 89^\circ}$ (все неравенства строгие, поскольку в левой части каждого неравенства слагаемые не равны).

Перемножив левые и правые части данных неравенств, и домножив затем обе части на 2, получим:

$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot \dots \cdot (1 + \operatorname{tg} 89^\circ) > 2\sqrt{\operatorname{tg} 1^\circ} \cdot 2\sqrt{\operatorname{tg} 2^\circ} \cdot \dots \cdot 2\sqrt{\operatorname{tg} 89^\circ}$$

$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot \dots \cdot (1 + \operatorname{tg} 89^\circ) > 2^{89} \sqrt{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ}$$

Далее, легко видеть, что

$$tg1^{\circ} \cdot tg2^{\circ} \cdot \dots \cdot tg89^{\circ} = tg1^{\circ} \cdot tg89^{\circ} \cdot tg2^{\circ} \cdot tg88^{\circ} \cdot \dots \cdot tg44^{\circ} \cdot tg46^{\circ} \cdot tg45^{\circ} =$$

$$tg1^{\circ} \cdot ctg1^{\circ} \cdot tg2^{\circ} \cdot ctg2^{\circ} \cdot \dots \cdot tg44^{\circ} \cdot ctg44^{\circ} \cdot tg45^{\circ} = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$$

С учетом этого получаем требуемое.

Что и требовалось доказать.

2. *Решение:*

Пусть абсцисса точки A равна a , где $a < 0$. Уравнение прямой AB имеет вид: $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Поскольку точка $A(a; 0)$ принадлежит данной прямой, то $0 = a + b$, откуда $b = -a$ и уравнение прямой AB примет вид: $y = x - a$. Точка D будет иметь координаты $D(0; -a)$.

Абсциссы точек B и C (x_1 и x_2) являются корнями уравнения $x^2 = x - a$ или $x^2 - x + a = 0$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \cdot x_2 = a$.

По свойству пересекающихся хорд имеем:

$$BD \cdot DC = ED \cdot DO.$$

Не сложно подсчитать, что $DO = |a|$, $BD = |0 - x_1| : \sin 45^\circ = \sqrt{2} \cdot |x_1|$

$$DC = |x_2 - 0| : \sin 45^\circ = \sqrt{2} \cdot |x_2|.$$

Тогда $\sqrt{2} \cdot |x_1| \cdot \sqrt{2} \cdot |x_2| = ED \cdot |a|$.

$$2 \cdot |x_1 x_7| = ED \cdot |a|, \quad 2 \cdot |a| = ED \cdot |a|, \quad ED = 2.$$

Answer: 2.

3. Решение:

Заметим, что $x = [x] + \{x\}$. Выполним преобразования:

$$100(\lceil x \rceil + \{x\}) + 50 \cdot \{x\} = 203,3;$$

$$100[x] + 150 \cdot \{x\} = 203,3; \quad (1)$$

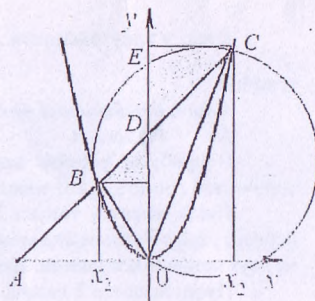
$$100[x] = 203,3 - 150 \cdot \{x\}.$$

Поскольку $0 \leq \{x\} < 1$, то $0 \leq 150\{x\} < 150$ и $53,3 < 203,3 - 150 \cdot \{x\} \leq 203,3$.

Отсюда $53,3 < 100[x] \leq 203,3$ и $0,533 < [x] \leq 2,033$. Поскольку $[x]$ целое число и нас интересует наибольший корень уравнения, то берем $[x]=2$. Подставим это значение в (1):

$$100 \cdot 2 + 150 \cdot \{x\} = 203,3$$

$$150 \cdot \{x\} = 3,3$$



$$\{x\} = 0,022.$$

Наибольший корень уравнения: $x=2+0,022=2,022$.

Ответ: 2,022.

4. Решение:

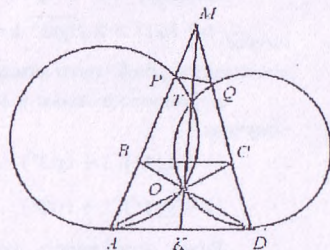
Пусть окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках O и T . (Если окружности ω_1 и ω_2 касаются, то точки O и T совпадают и в этом случае задача решается аналогично). Пусть точка K — точка пересечения прямых TO и AD . Докажем, что K — середина стороны AD .

По свойству касательной и секущей имеем:

$$KO \cdot KT = KA^2, KO \cdot KT = KD^2.$$

$$\text{Откуда } KA^2 = KD^2, KA = KD.$$

По известному свойству трапеции, середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Это означает, что точки K, O, T и M лежат на одной прямой.



Далее, по свойству секущих, имеем: $MP \cdot MA = MT \cdot MO$, $MQ \cdot MD = MT \cdot MO$.

$$\text{Отсюда } MP \cdot MA = MQ \cdot MD, \text{ и } \frac{MP}{MQ} = \frac{MD}{MA}.$$

Итак, у треугольников AMD и QMP угол M — общий и $\frac{MP}{MQ} = \frac{MD}{MA}$. Отсюда и следует их подобие.

Что и требовалось доказать.

5. Решение:

Попробуем решить задачу для меньшего числа гномов. Последовательно увеличивая количество гномов, постараемся обнаружить закономерность.

Пусть имеется только 2 гнома. По отношению друг к другу они являются соседями. На первого гнома Белоснежка может надеть колпак одного из трех цветов, на второго — колпак одного из двух оставшихся цветов. Итого число способов равно $3 \cdot 2 = 6$.

Пусть имеется 3 гнома. На первого гнома Белоснежка может надеть колпак одного из трех цветов, на второго — колпак одного из двух оставшихся цветов. На третьего придется надеть колпак оставшегося цвета. Итого число способов равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Пусть имеется 4 гнома. На первого гнома Белоснежка может надеть колпак одного из трех цветов. Пусть это будет белый цвет (обозначим этого гнома через B , см. рисунок). Рассмотрим гнома, стоящего через одного от B . Обозначим его буквой X .

Если на гноме X колпак белого цвета, то на каждого из двух оставшихся гномов может быть колпак одного из двух цветов. Тогда, учитывая, что вместо B может быть любой из трех цветов, число способов будет $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

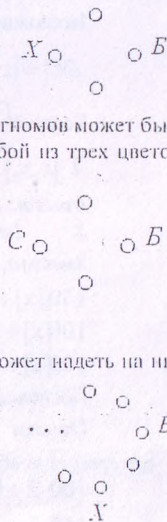
Если на гноме X колпак не белого, а например, синего цвета (см. рис.). Тогда на каждого из двух оставшихся гномов может быть колпак только красного цвета. Тогда, учитывая, что вместо B может быть любой из трех цветов, а вместо C — любой из двух оставшихся, число способов будет $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Всего для четырех гномов число способов будет равно $12+6=18$.

Пусть имеется n гномов. Количество способов, которыми Белоснежка может надеть на них колпаки, обозначим через $S(n)$. Ранее было выяснено $S(2)=6$, $S(3)=6$, $S(4)=18$.

На первого гнома Белоснежка может надеть колпак одного из трех цветов. Пусть это будет белый цвет (обозначим этого гнома через B , см. рисунок). Рассмотрим гнома, стоящего через одного от B . Обозначим его буквой X .

Если на гноме X колпак белого цвета, то на каждого из двух оставшихся



гномов может быть надет колпак одного из двух цветов. Тогда число способов, которыми Белоснежка может надеть колпаки на n гномов равно удвоенному числу способов, которыми она может надеть колпаки на $n-2$ гномов.

Если на гноме X колпак не белого, а например, синего цвета. Тогда на каждого из двух оставшихся гномов может быть колпак только красного цвета. Тогда число способов, которыми Белоснежка может надеть колпаки на n гномов равно числу способов, которыми она может надеть колпаки на $n-1$ гнома.

Итак, $S(n) = S(n-1) + 2S(n-2)$, где $n > 2$.

$S(2) = 6$, $S(3) = 6$. Далее, имеем: $S(4) = S(3) + 2S(2) = 6 + 2 \cdot 6 = 18$.

$S(5) = S(4) + 2S(3) = 18 + 2 \cdot 6 = 30$. $S(6) = S(5) + 2S(4) = 30 + 2 \cdot 18 = 66$.

$S(7) = S(6) + 2S(5) = 66 + 2 \cdot 30 = 126$.

Ответ: 126 способов.